# 刚体运动与对称群

王秀桦 * 辛林

(福建师范大学数学与计算机科学学院 福建 福州 350007 )

**摘 要** 由刚体运动引入的对称与群，阐述了群在刻画对称性中的重要作用．本文主要通过用高等代数的知识来介绍计算正立方体对称群的方法.

**关键词** 刚体运动 对称群 正交变换 旋转 反射

普通高中数学新课程改革开展在即．这一形势迫切要求广大中学数学教师对新课程标准的体系结构及知识内容，尤其是新增内容予以充分把握，以确保课改的顺利进行.

对称与群作为新课标选修系列 3 的第 4 块专题出现，目的在于使学生了解群在刻画对称性中的作用，并学会求一些较为简单的几何图形的对称群．本文主要通过用高等代数的知识来介绍计算正立方体对称群的方法.

## 一．基本定义及相关命题

下面定义见参考文献 [1].

**定义 1.** 设 $P$ 是一个平面， $f: P \longrightarrow P$ 为映射，则称 $f$ 为平面刚体运动，如果

(1) $f$ 是双射;

(2) $f$ 保持任意两点间的距离不变，即 $|\alpha-\beta| = |f(\alpha)-f(\beta)|, \forall \alpha.\beta \in P$

自然地，可将这定义推广到任意欧氏空间，即

**定义 2.** 设 $V$ 是一个欧氏空间， $f$ 为 $V$ 上的变换，称 $f$ 为空间刚体运动，如果

(1) $f$ 是一一变换;

(2) $f$ 保持任意两点间的距离不变。

若 $f$ 保持 $V$ 中任意两点间的距离不变，则 $f$ 为单射。从而，当 $V$ 为有限维空间，并且 $f$ 是线性变换时， $f$ 必为双射。

**引理 3.** 设 $V$ 为有限维欧氏空间， $f$ 为 $V \to V$ 上保持内积不变的映射，则 $f$ 为线性变换.

证明可参见 [2] 的习题.

---

*作者简介：王秀桦 (1983—), 女，福建福州人，硕士研究生

**引理 4.** 设 $V$ 为有限维欧氏空间, $f$ 保持任意两点间距离不变的变换, 且有不动点 $f(0)=0$, 则 $f$ 为线性变换, 从而是正交变换.

证明 对 $\forall \alpha,\beta\in V$ 有 $|\alpha-\beta|=|f(\alpha)-f(\beta)|$ 即

$$< f(\alpha)-f(\beta), f(\alpha)-f(\beta) >=< \alpha-\beta, \alpha-\beta >$$

所以

$< f(\alpha),f(\alpha) > -2 < f(\alpha),f(\beta) > + < f(\beta),f(\beta) >=< \alpha,\alpha > -2 < \alpha,\beta > + < \beta,\beta >$
又 $\forall \alpha\in V$ 有 $|f(\alpha)-f(0)|=|f(\alpha)-0|=|f(\alpha)|=|\alpha|$, 因此 $< f(\alpha),f(\beta) >=< \alpha,\beta >$ 即 $f$ 保持内积不变. 由引理 1 结论得 $f$ 为线性变换, 从而是正交变换.

总结上述结论得

**命题 5.** 设 $V$ 为有限维欧氏空间, $f$ 为 $V$ 的一个变换, 以下等价:

(1) $f$ 为正交变换.

(2) $f$ 保持内积不变, 即对 $\forall \alpha,\beta\in V$ 有 $< \alpha,\beta >=< f(\alpha),f(\beta) >$

(3) $f$ 保持任意两点间的距离不变, 且有不动点 $f(0)=0$

显然欧氏空间上所有正交变换构成一个群. 记 $O_n(\mathbb{R})$ 表示所有 $n$ 阶正交矩阵所构成的群. 由于正交矩阵的行列式为 $\pm1$, 令 $H=\{T\in O_n(\mathbb{R})\mid |T|=1\}$

**引理 6.** $H$ 是 $O_n(\mathbb{R})$ 中指数为 2 的不变子群.

证明 $\forall I\in O_n(\mathbb{R})$,$T\in H$, 有 $|ITI^{-1}|=|I||I|^{-1}|T|=1$ 即 $ITI^{-1}\in H$. 则 $H$ 为 $O_n(\mathbb{R})$ 中的不变子群.

对任意取定的行列式为 -1 的正交矩阵 $A$, 和 $\forall T\in H$, 有 $|AT|=-1$. 因此 $H$ 的左陪集只有不同的两类, 即 $H$ 在 $O_n(\mathbb{R})$ 中的指数为 2.

## 二. 计算正立方体的对称群

取不动点为原点, 建立坐标系, 从而构成一个欧氏空间. 取定标准正交基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 从而得到正交矩阵的基本类型如下 [2]:

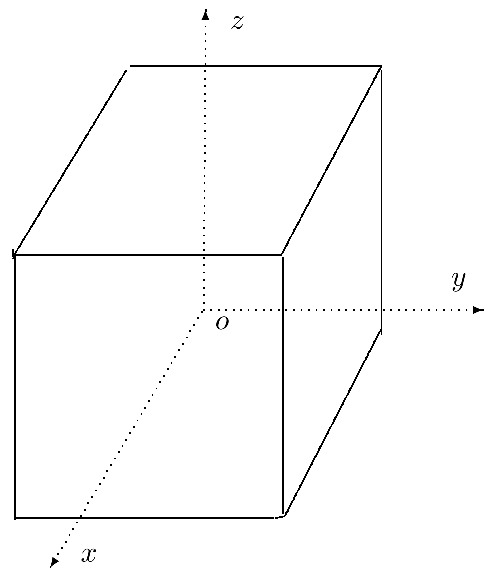
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 称为旋转, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 称为反射.

如果一个图形 $K$ 在刚体运动的作用下仍然与原来的图形重合, 就称图形 $K$ 具有对称性, 而这一刚体运动称为该图形的对称变换。所有对称变换构成一个群, 这个群称为该图形 $K$ 的对称群。

以下引用第一部分的命题来计算正立方体的对称群.

注：为保证不重复不遗漏，可采用以下求法：选定一个面，通过旋转，使其位置分别处于正立方体的六个不同面上．这样一来，就有六种不同的正交变换；对每种变换，再固定同一方向的旋转轴，依次旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, 分别得到不同的四种情况，一共是 $4\times 6=24$ 种旋转变换．(见下图).




1. 绕 $x$ 轴正向旋转 $\alpha$ 有矩阵变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ,$\alpha$ 依次取 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, 分别有下述矩阵变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 绕 $y$ 轴正向旋转 $\alpha$ 有矩阵变换 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ,$\alpha$ 依次取 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, 分别有下述矩阵变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 绕 $z$ 轴正向旋转 $\alpha$ 有矩阵变换 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,$\alpha$ 依次取 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, 分

别有下述矩阵变换：

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

以下给出 24 种旋转变换的计算，依注，选定 $y$ 轴正向，各面都转到该面上后，再绕 $y$ 轴旋转 (依上图).

1. 先绕 $z$ 轴正向旋转 $90^\circ$, 后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 分别有下述 [1],[2],[3],[4] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdots[1]$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdots[2]$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdots[3]$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdots[4]$$

2. 先绕 $z$ 轴正向旋转 $180^\circ$, 后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 分别有下述 [5],[6],[7],[8] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdots[5]$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdots[6]$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdots[7]$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdots[8]$$

3. 先绕 $z$ 轴正向旋转 $270^\circ$, 后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 分别有下述 [9],[10],[11],[12] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdots[9]$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdots[10]$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdots[11]$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdots[12]$$

4. 先绕 $z$ 轴正向旋转 $360^\circ$, 后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 分别有下述 [13],[14],[15],[16] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[13] \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdots[14]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[15] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots[16]$$

5. 先绕 $x$ 轴正向旋转 $90^\circ$，后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ,180^\circ,270^\circ,360^\circ$ 分别有下述[17],[18],[19],[20] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[17] \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdots[18]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[19] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots[20]$$

6. 先绕 $x$ 轴正向旋转 $270^\circ$，后绕 $y$ 轴正向依次旋转 $90^\circ,180^\circ,270^\circ,360^\circ$ 分别有下述[21],[22],[23],[24] 矩阵变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[21] \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots[22]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots[23] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdots[24]$$

由上得旋转变换有 24 种，再乘上 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 又得 24 种反射变换。因此，正立方体对称群的阶数为 $2\times24=48$ 。

## 三. 推广应用

利用欧拉公式可得正多面体只有以下五种正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。因此它们的对称群阶数分别有：

正四面体： $3\times4\times2=24$

正六面体： $4\times6\times2=48$

正八面体： $3\times8\times2=48$

正十二面体： $5 \times 12 \times 2 = 120$

正二十面体： $3 \times 20 \times 2 = 120$

**定理 7.** 正 $n$ 面体对称群的阶数为 $2\,nl$, 其中 $l$ 为正 $n$ 面体每个面的边个数。

## 参考文献


[1] 刘绍学主编， 对称与群[M]，人民教育出版社， 2004.

[2] 张禾瑞，郝炳新． 高等代数 第三版 [M], 高等教育出版社， 1986.


## Rigid Motions and Symmetric Group


Wang Xiuhua[1] Xinlin[2]

(1,2 School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University ,Fuzhou 350007 )



**Abstract** Symmetry and group which are leaded by the rigid motions,expounds that the group plays an important role on portraying the symmetry.This paper introduces the method of calculating the order of cube symmetric group mainly by the knowledge of advanced algebra.



**Keywords** Rigid motions; Symmetric group; Orthogonal transformation; Rotation; Reflection